정수론 HW. 1

20011759 박수민

**1. 를 만족하는 정수근 가 존재하지 않음을 보이시오.**

정수근 가 존재한다 가정하자, 그렇다면 양변의 값은 당연히 각각 정수이다. 이때 를 취해주면 다음과 같다.

이때, y는 정수이므로 또한 정수이고 이다. 그러므로

이다. 그런데 은 에서 1또는 4만 합동이다. 즉 이므로 모순,

그러므로 정수근이 존재하지 않는다.

**2. 의 유리근 를 모두 구하시오**

(-1,0)을 지나는 기울기가 인 직선을 가정하자,  
이 직선의 방정식은 이다. 이 직선과 쌍곡선 의 교점을 생각해보면 쌍곡선 에 직선 를 대입하여 얻을 수 있는데 이때 나오는 식은 모든 계수가 유리수이기에 한 근이 유리수라면 다른 근은 유리수가 나와야 한다. 근과 계수의 관계에서 유리수집합은 사칙연산에 대해 닫혀 있기 때문이다. 이때 한 근은 무조건이므로 나머지 한 근은 유리수이다.  
반대로, (-1,0)를 제외한 쌍곡선 위의 임의의 한 유리수 점과 (-1,0)를 잇는 직선의 울기는 마찬가지로 유리수가 나와야만 한다. 그러므로 쌍곡선 위의 모든 유리근은 기울기가 유리수이고 유리근을 지나는 직선과의 교점으로 표현할 수 있다.

(-1,0)을 무조건 지나는 직선이므로 로 묶어서 정리하면 다음과 같다.

즉 이며, 이를 직선의 방정식에 대입하면

인 모든 유리수 에 대해 방정식 은 유리수 해를 얻는다.

**3. 유리근, 이를 이용하여 유리근 하나 더 구하시오**

을 지나는 직선의 방정식을 계산하면 다음과 같다.

이 직선과 방정식 의 교점을 생각해보면 모든 계수가 유리수인 3차 방정식이 나오는데 근과 계수의 관계와, 유리수 집합에서의 사칙연산은 닫혀 있다는 점을 생각해보면 이미 일 때 교점을 가지므로 나머지 한 근은 유리수여야 한다. 즉, 직선 와 방정식 의 교점 중 를 제외한 나머지 하나는 유리수가 되므로 이를 구하면 된다. 방정식에 직선을 대입하면 다음과 같다.

은 직선과 방정식 위의 점이기도 하기에 교점이다. 즉 위 방정식은 를 해로 가지므로 로 인수분해가 가능하다. 조립제법으로 풀어서 정리하면 다음과 같다.

즉, 방정식 은 )을 유리근으로 가진다.

**4. 를 만족하는 정수 를 구하시오**

우선 유클리드 호제법을 이용하면 이므로  
이다. 이때, 라 하자 그럼 은 이 되고, 이는 가 된다. 이를 위에 다시 대입하면  
이므로 에서 이 된다.  
위와 같은 방식으로 유클리드 호제법를 응용하여 정리하면 다음과 같다.  
즉 이고 이므로  
즉, 의 정수근은 이다.

추가로 이는 수 없이 많은 정수근 중 하나이다. 다른 “모든” 정수근을 구하기 위해서는 에서 252와 198의 최소 공배수 2,772를 생각해보면 가 11(=2772/252)가 증가할 때, y가 14(=2772/198)가 감소한다면 여전히 방정식은 성립한다.   
그러므로 임의의 정수 에 대해 이다.  
이때 앞에서 적당한 근 을 미리 구해 두었으므로 대입하여 모든 정수근을 구할 수 있다.

**5. 합동방정식 의 해를 모두 구하시오.** 이고 이므로 위 합동 방정식에서 3으로 나누면 modular도 으로 나눠진다.  
이므로 곱셈 군에서 3의 곱셈 역원은 2이다.   
그러므로 양변에 2를 곱해서 정리하면 다음과 같다.

즉 이므로 이다.